



TITLE:

無限階微分方程式の局所可解性 (Infinite Analysis)

AUTHOR(S):

石村, 隆一

CITATION:

石村, 隆一. 無限階微分方程式の局所可解性(Infinite Analysis). 数理解析
研究所講究録 1985, 578: 1-20

ISSUE DATE:

1985-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99275>

RIGHT:

無限階微分方程式の局所可解性

九 大 理 石 村 隆 一

ISHIMURA, Ryūichi

0. 序

X を \mathbb{C}^n の開集合, x_0 を X の点とし, x_0 における正則函数の芽の全体を \mathcal{O}_{x_0} , X 上の正則函数の層を \mathcal{O}_X と書く. 層準同型 $P: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ のうちで「連続」なものは局所作用素として特徴づけられる ([5]):

P は無限階微分作用素 $P(x, D_x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} a_\alpha(x) D_x^\alpha$, $a_\alpha(x) \in \mathcal{O}(X)$ の形であって, 表象 $\varphi(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ は $X \times \mathbb{C}^n$ で正則かつ, $x \in X$ について一様に, ξ についての整函数として指数型である i.e. X の任意のコンパクト集合 K に対し, $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \ln \sup_{x \in K, |\xi|=1} |P(x, \xi)| = 0$.

ここでは先ずもう少し一般的に, 連続な線型写像 $P: \mathcal{O}_{x_0} \rightarrow \mathcal{O}_{x_0}$ とは何か, ということを考えることから始め, それがやはり無限階の微分作用素の形になることを見る. さて, 一方無限階の微分方程式

$$(0) \quad P(x, D_x)u = \sum a_\alpha(x) D_x^\alpha u = f \quad (u, f \in \mathcal{O}_{x_0})$$

について, その重要性和歴史については青木 [1] に記されているが, そこにあるように, 何れの場合も従来は定数係数の場合がほとんどであった.

しかし、変数係数の場合についてごく最近になって、[6] で扱ったようないくつかの型の方方程式や、代数的に特殊な型で、かつ有限指数をもつ (青木-柏原-河合 [3]) 作用素で定義された方方程式については、(0) の局所可解性が証明されるようになってきた。ここでは、前記のような拡張された無限階微分作用素について、微分方程式 (0) の局所可解性を考える。以下では $\lambda = 0$ として考えることにする。

1. 一点における微分作用素

先ず記号を準備する: $z, \eta \in \mathbb{C}^n$ に対し、次のように書く。

$$z \cdot \eta = (z_1 \eta_1, z_2 \eta_2, \dots, z_n \eta_n),$$

$$\bar{z}^1 = (\bar{z}_1^1, \bar{z}_2^1, \dots, \bar{z}_n^1) \quad \text{但し } \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n \neq 0,$$

$$\overrightarrow{|\bar{z}|} = (|\bar{z}_1|, |\bar{z}_2|, \dots, |\bar{z}_n|) \quad \text{ここで } \bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \text{ である。}$$

また、 $r, \rho \in \mathbb{R}_+^n$ に対し、 $r \leq \rho$ とは $r_1 \leq \rho_1, r_2 \leq \rho_2, \dots, r_n \leq \rho_n$ ということであり、 $r < \rho$ と言ったる $r_1 < \rho_1, r_2 < \rho_2, \dots, r_n < \rho_n$ を意味する。

$\vec{e} = (1, 1, \dots, 1)$ とおく。 $r \gg 0$ (に対し、原点中心の多重円板 Δ_r

$:= \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| < r_1, |z_2| < r_2, \dots, |z_n| < r_n\}$ と書き、 $\|f\|_r := \sup_{z \in \Delta_r} |f(z)|$

とて $H_r^\infty := \{f \in \mathcal{O}(\Delta_r) \mid \|f\|_r < +\infty\}$ とおけば、これは $\|\cdot\|_r$

で Banach 空間になる。すると (DFS) 空間とて $\mathcal{O}_0 = \varinjlim_r H_r^\infty$ で

ある。さて、 $P: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$ を連続な線型写像とて $\forall m \in \mathbb{Z}_+^n$ に対し、

$$(1) \quad b_m(x) = P\left(\frac{x^m}{m!}\right)$$

とおく。以下 $P: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$ は連続線型写像とする。

補題 1. 増加函数 $\lambda: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ があって, 任意の $r \in \mathbb{R}_+^n$ に対し, P は連続線型写像 (P と書く) : $H_r^\infty \rightarrow H_{\lambda(r)}^\infty$ を定める.

(証明). H_r^∞ の単位球を B_r で表わすと, B_r は $\mathcal{O}_0 = \bigcup_{\lambda} H_\lambda^\infty$ の有界集合. 従って 任意の $r \gg 0$ に対し $\lambda = \lambda(r) \in \mathbb{R}_+^n$ があり, $P B_r$ は $H_{\lambda(r)}^\infty$ の中に含まれてそこで有界 (小松 [9], 定理 (IV.3.28)). 定数 $C_r > 0$ があって,

$$(2) \quad P B_r \subset C_r B_{\lambda(r)}.$$

B_r は H_r^∞ で吸収的だから, 結局 $P: H_r^\infty \rightarrow H_{\lambda(r)}^\infty$ で P は連続.

かつ明らかに λ は増加函数としてよい. (証明終).

特に, ある $\lambda_0 \in \overline{\mathbb{R}_+^n}$ があって, 各 $b_\mu(\alpha) \in H_{\lambda_0}^\infty \subset \mathcal{O}(\Delta_{\lambda_0})$. 但し, $\mathbb{R}_+ :=]0, \infty]$. また明らかに $P: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$ は $f \mapsto \sum_{\mu} b_\mu(\alpha) D_x^\mu f(0)$: $H_r^\infty \rightarrow H_{\lambda(r)}^\infty$ で定義されるとしてよい: 実際 $f \in H_r^\infty$ に対し, その Taylor 展開 $f(\alpha) = \sum_{\mu} \frac{\alpha^\mu}{\mu!} D_x^\mu f(0)$ を考えればよい.

(2) より, $\|P f\|_{\lambda(r)} \leq C_r \|f\|_r$ であるから, 特に各 μ に対し,

$$(3) \quad \|b_\mu\|_{\lambda(r)} \leq C_r \frac{r^\mu}{\mu!} \quad (\forall r \gg 0).$$

さて, そこで $\lambda \in \Delta_{\lambda_0}$ と $z \in \mathbb{C}^n$ に対し, 形式的に $Q(\lambda, z) := \sum_{\mu} b_\mu(\alpha) z^\mu$ とおこう. この時,

補題 2. $Q(\lambda, z)$ は $\Delta_{\lambda_0} \times \mathbb{C}^n$ で正則で, 各 $\lambda \in \Delta_{\lambda_0}$ に対して, z の整函数として階数 ≤ 1 である. 更に associated order ρ と associated type σ の組で $\rho \leq \vec{e}$, $\sigma \ll (+\infty, +\infty, \dots, +\infty)$ となるものがある. 即ち $Q(\lambda, \cdot)$ は指数型である.

注意. associated order P と associated type σ の組 (P, σ) を associated category と呼ぶ. 以上の用語については POKHIN [13] 参照.

(証明) 実際 (3) より, $x \in \Delta_{\Delta_0}$ とし,

$$\begin{aligned} |Q(x, \vec{z})| &\leq \sum_m \|b_m\|_{\Delta_0} |\vec{z}|^m \leq C_r \sum_m \frac{r^m}{m!} |\vec{z}|^m \\ &= C_r \exp\langle r, \vec{z} \rangle \leq C_r \exp\|r\| \cdot |\vec{z}| \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

この補題を念頭に, 今 $Q(x, \vec{z}) = \sum_m b_m(x) \vec{z}^m$ は 各 $x \in \Delta_{\Delta_0}$ に対し associated category $\leq (\vec{e}, \sigma(x))$ をもつとしよう. 但し, $\sigma(x) = (\sigma_0(x)) \gg 0$. 即ち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $A_\varepsilon > 0$ があって,

$$|\sum_m b_m(x) \vec{z}^m| = |Q(x, \vec{z})| \leq A_\varepsilon \exp\langle \varepsilon \vec{e} + \sigma(x), \vec{z} \rangle.$$

従って任意の $R \gg 0$ に対し, Cauchy の評価式から

$$|b_m(x)| \leq A_\varepsilon e^{\langle \varepsilon \vec{e} + \sigma(x), R \rangle} R^{-m},$$

ここで $R = (\varepsilon e + \sigma(x))^{-1} \cdot m$ とおけば,

$$|b_m(x)| \leq A_\varepsilon \frac{e^{|m|}}{\mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2} \dots \mu_n^{m_n}} (\varepsilon \vec{e} + \sigma(x))^m$$

となる. 従って

$$\sup_m |b_m(x)| \mu! S^m < +\infty \quad \text{for every } S \ll (\varepsilon \vec{e} + \sigma(x))$$

であり, $\varepsilon > 0$ は任意だから, 結局 for $S \ll \sigma(x)$ で成立つ. 従って

$$P : H_r^\infty \rightarrow \mathcal{O}(\{x \in \Delta_{\Delta_0} \mid \sigma(x) \ll r\}) \quad \text{連続}$$

でまた任意の $r \gg \sigma(x)$ に対し 定数 $C_r > 0$ があって

$$(3)' \quad |b_m(x)| \leq C_r \frac{r^m}{\mu!} \quad (\forall m).$$

ここで我々は正則パラメータ $x \in \Delta_{\Delta_0}$ をもつる整函数 $P = \sum a_m(x) \vec{z}^m$ を

$$(4) \quad P(x, \vec{z}) := Q(x, \vec{z}) \exp(-\langle x, \vec{z} \rangle)$$

と定義する。これは各 α に對し、

$$(4)' \quad a_\alpha(x) = \sum_{m \leq \alpha} \frac{b_m(x)}{(d-m)!} (-x)^{d-m}$$

と云つてもよい。 $P(x, z)$ は z について指數型である。

注意。逆に各 m に對し 次の逆公式を得る：

$$(4)'' \quad b_m(x) = \sum_{\alpha \leq m} \frac{a_\alpha(x)}{(m-\alpha)!} x^{m-\alpha}.$$

以上のことより、次の定理を得る：

定理 1. 連続線型写像 $P: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$ に對し、 $b_m(x) := P(\frac{x^m}{m!})$

とおくと、 $\rho_0 \gg 0$ があつて $Q(x, z) = \sum_m b_m(x) z^m$ は $x \in \Delta_{\rho_0}$ と $z \in \mathbb{C}^n$ の

正則函数で、各 $x \in \Delta_{\rho_0}$ に對し、 z の整函数として指數型である。

そこでその associated category $\leq (\vec{e}, \sigma(x))$ なるものがあつて、 $\sigma(x)$

$= (\sigma_j(x))_{1 \leq j \leq n}$ とし、各 $\sigma_j(x)$ は x について上半連続とする。この時 P は

任意の $r \gg 0$ に對し、 $P: \mathcal{O}(\Delta_r) \rightarrow \mathcal{O}(\{x \in \Delta_{\rho_0} \mid \sigma(x) \ll r\})$ なる

連続写像であり、かつ作用素 $\mathcal{O}(\Delta_r) \rightarrow \mathcal{O}(\{x \in \Delta_{\rho_0} \mid \sigma(x) + 2|\vec{x}| \ll r\})$

として微分作用素 $P(x, D_x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ の形である。

(証明). まず各 $\sigma_j(x)$ は上半連続として構わないことは、かわりに

$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{|x - x_0| < r} \sigma_j(x)$ なる函数を考えればよいから明らか。そこで、各 α

に對し (4)' 及び (3)' より、任意の $\rho \gg \sigma(x)$ に對し、

$$\begin{aligned} |a_\alpha(x)| &\leq \sum_{m \leq \alpha} \frac{|\vec{x}|^{d-m}}{(d-m)!} |b_m(x)| \leq C_\rho \sum_{m \leq \alpha} \frac{|\vec{x}|^{d-m} \rho^m}{(d-m)! m!} \\ &= C_\rho \frac{1}{d!} (\rho + |\vec{x}|)^d. \end{aligned}$$

次に、各 $\xi \in H_r^0$ と各 $x \in \Delta_{\rho_0}$ で $\sigma(x) + 2|\vec{x}| \ll r$ なるものに對し、

$$|D_x^\alpha f(x)| \leq \|f\|_r (r - |\vec{x}|)^{-\alpha} \alpha!$$

だから, 結局

$$\sum_{\alpha} (a_{\alpha}(\alpha) D_x^\alpha f(x)) \leq C_p \|f\|_r \sum_{\alpha} \frac{(p + |\vec{x}|)^\alpha}{(r - |\vec{x}|)^\alpha} < +\infty$$

が $p + |\vec{x}| < r - |\vec{x}|$ の時, 従って $p(x) + 2|\vec{x}| < r$ の時成立.

次に, $\bar{P} := \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\alpha) D_x^\alpha$ とおけば, それは すぐわかるように 連続写像

$\mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$ となる. 特に $f := 1$ と取れば, $\bar{P}f = a_0 = b_0 = Pf$.

また $f := x^m/m!$ と取れば 帰納法で

$$\bar{P}\left(\frac{x^m}{m!}\right) = \frac{1}{m!} \sum_{\alpha \leq m} a_{\alpha}(\alpha) \frac{m! x^{m-\alpha}}{(m-\alpha)!} = b_m(x) = P\left(\frac{x^m}{m!}\right).$$

従って 連続性から $P = \bar{P}$ 即ち $P = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\alpha) D_x^\alpha$ である. (証明終).

系. $Q(\alpha, \beta)$ は ある $r \gg 0$ に 対し, associated category $\leq (\vec{e}, 0, |\vec{x}|)$

を 与 へ る. すると, $P : \mathcal{O}(\Delta_r) \rightarrow \mathcal{O}(\Delta_{(r, \vec{e}, r)})$ (for every $r \gg 0$)

であり, かつ P は 作用素 $\mathcal{O}(\Delta_r) \rightarrow \mathcal{O}(\Delta_{(2\vec{e}+0), r})$ として 微分

作用素 $P(\alpha, D_x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\alpha) D_x^\alpha$ の 形 である.

注意. 以上より, 結局, 層準同型を 与 へ ない ような 無限階微分

作用素の表象は, 簡単の為 $n=1$ として, 階数 1, 正規型 という

ことに なる.

2. 例

ここに は, $r \gg 0$ に 対し, $r^{\frac{1}{2}} = (r_1^{\frac{1}{2}}, r_2^{\frac{1}{2}}, \dots, r_n^{\frac{1}{2}})$ と 書く.

1° $\sigma(x) = \sigma \cdot |\vec{x}|^{\frac{1}{2}}$ with $\sigma \gg 0$.

この場合,

$$P: f(x) \mapsto \sum_{\alpha} b_{\alpha}(x) D_x^{\alpha} f(0) : \mathcal{O}(\Delta_r) \rightarrow \mathcal{O}(\Delta_{r_2}) \quad (r \gg 0)$$

かつ,

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D_x^{\alpha} : \mathcal{O}(\Delta_r) \rightarrow \mathcal{O}(\Delta_{\frac{-r + \sqrt{r^2 + 8r}}{4}}).$$

$$2^{\circ} \quad \sigma(x) = \sigma \cdot |\vec{x}|^{\frac{1}{2}} - 2|\vec{x}| \quad (\sigma \gg 0).$$

この時,

$$P: \mathcal{O}(\Delta_r) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \quad \text{if } r < \frac{9}{\sqrt{8}}$$

$$P: \mathcal{O}(\Delta_r) \rightarrow \mathcal{O}(\Delta_{\frac{r - \sqrt{r^2 + 8r}}{4}}) \quad \text{if } r \geq \frac{9}{\sqrt{8}}$$

かつ

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D_x^{\alpha} : \mathcal{O}(\Delta_r) \rightarrow \mathcal{O}(\Delta_{r-2r_0}).$$

$$3^{\circ} \quad \sigma(x) \equiv 0.$$

この時, $Q(x, \beta) \equiv \text{const.} ; \equiv 1$ とし、すなわち, $P(x, \beta) = \exp(-\langle x, \beta \rangle)$

$$P: f(x) \mapsto f(0) : \mathcal{O}(\Delta_r) \rightarrow \mathbb{C}$$

と存子. また実際

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D_x^{\alpha} f(x) = \sum_{\alpha} \frac{(-x)^{\alpha}}{\alpha!} D_x^{\alpha} f(x) = f(0).$$

$$4^{\circ} \quad P(x, \beta) \text{ が } \beta \text{ について 指数型 } 0 \text{ の時.}$$

この時, $Q(x, \beta) = e^{\langle x, \beta \rangle} P(x, \beta)$ は associated category $(\vec{e}, \vec{x}) \in \mathcal{E}$.

3. 無限階微分方程式

さて, 以下では $Pu = f$ の $x=0$ での局所可解性, 即ち, $P: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$ の全射性を考えることにする. これからは, P, R, r などにはスカラーを表わすとする.

さて, \mathbb{C}^n 上の $\{0\}$ に関する正則超函数の全体 (S. K. K. [14])

$$\mathcal{B}'_{\{0\}\mathbb{C}^n} = \mathcal{H}'_{\{0\}}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = \{u = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} u_\alpha \delta^{(\alpha)}(x) \mid \sum u_\alpha z^\alpha \text{ は指数型0の整函数}\}$$

は (FS) 空間であるが, ここでは次のことにだけ注意しておく:

$$(5) \quad x^\beta \delta^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} (-1)^{|\beta|} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} \delta^{(\alpha-\beta)}(x) & (\beta \leq \alpha) \\ 0 & (\beta \not\leq \alpha) \end{cases}$$

更にそれは次の内積により (DFS) 空間 \mathcal{O}_0 に双対な (FS) 空間と同一視される: 任意の $f = \sum f_\alpha x^\alpha \in \mathcal{O}_0$ と $u = \sum u_\alpha \delta^{(\alpha)}(x) \in \mathcal{B}'_{\{0\}\mathbb{C}^n}$ に対し,

$$(6) \quad \langle f, u \rangle = \sum (-1)^{|\alpha|} \alpha! f_\alpha u_\alpha \quad (\text{K. K. [7]}).$$

さて, \mathcal{O}_0 を更にその各元の Taylor 展開の係数の成す空間

$$E := \{\varphi = (\varphi_m)_{m \in \mathbb{Z}_+^n} \mid \sum \varphi_m \frac{x^m}{m!} \in \mathcal{O}_0\}$$

と同一視する i.e. $f \mapsto (D^m f(0))_m : \mathcal{O}_0 \xrightarrow{\sim} E$. その位相を一応書いて

おこう: $\varphi = (\varphi_m)_{m \in \mathbb{Z}_+^n} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+^n}$ に対し, norm

$$\|\varphi\|_p = \sup_m |\varphi_m| p^{-|\alpha|} (m!)^{-1} \quad (p > 0)$$

とおき Banach 空間 $E_p := \{\varphi = (\varphi_m) \mid \|\varphi\|_p < +\infty\}$ と定義して

$$E \simeq \varinjlim E_p = \{\varphi = (\varphi_m) \mid p > 0 \text{ が存在して } \|\varphi\|_p < +\infty\}.$$

(DFS) 空間として $\mathcal{B}'_{\{0\}\mathbb{C}^n} \simeq E' = \{\varphi = (\varphi_m) \mid \text{任意の } p > 0 \text{ に対し, } \|\varphi\|'_p := \sup_m |\varphi_m| p^{|\alpha|} m! < +\infty\} \text{ となり, } E' \text{ の位相は semi-norm の系 } (\|\cdot\|'_p)_{p>0}$

で与えられる. さて, E と E' の双対性は $\langle \varphi, \psi \rangle := \sum \varphi_m \psi_m$ で与

えられる. 同一視 $\mathcal{B}'_{\{0\}\mathbb{C}^n} \xrightarrow{\sim} E'$ は Fourier-Borel 変換 であり,

それを \mathcal{F} と書けば, \mathcal{F} は次のように表わされる. 但し, ここで E' は

指数型0の整函数の空間 $\{\sum \varphi_n z^n \mid \varphi = (\varphi_n) \in E\}$ と同一視する:

$$(7) \quad \mathcal{H}(u)(z) = \langle e^{\theta \cdot z}, u(\theta) \rangle \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

そこで転置写像 $\epsilon_P: B_{\text{pos}}(\mathbb{C}^n) \rightarrow B_{\text{pos}}(\mathbb{C}^n)$ は

$$\epsilon_P u = \epsilon_P(u, D_x) u = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} D_x^{\alpha} (a_{\alpha} u)(x) = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \langle b_{\alpha}, u \rangle \delta^{(\alpha)}(x)$$

で与えられるから, $\epsilon_P: E' \rightarrow E'$ とおいておけば,

$$(7)' \quad \mathcal{H}(\epsilon_P u) = P(D_z, \bar{z})(\mathcal{H}u)(z) := \sum_{\alpha} \bar{z}^{\alpha} a_{\alpha}(D_z)(\mathcal{H}u)(z).$$

さて, 同一視 $\mathcal{O}_0 \cong E$ によって $P: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$ はどうなるか見る: 各 α に

対し, $a_{\alpha}(x) = \sum_{\beta} a_{\alpha}^{\beta} x^{\beta}$ と展開する. 任意の $f = \sum_{\gamma} f_{\gamma} x^{\gamma} \in \mathcal{O}_0 (= \mathbb{R}[x])$,

$$\begin{aligned} P f(x) &= \sum_{\alpha} b_{\alpha}(x) D^{\alpha} f(x) = \sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta \leq \alpha} \frac{x^{\beta}}{\beta!} \sum_{\gamma} a_{\alpha-\beta}^{\gamma} x^{\gamma} \right) D^{\alpha} f(x) \\ &= \sum_{\gamma} \left(\sum_{\alpha} \gamma! \sum_{\beta \leq \alpha, \beta \leq \gamma} \frac{a_{\alpha-\beta}^{\gamma}}{\beta!} D^{\alpha} f(x) \right) \frac{x^{\gamma}}{\gamma!} \end{aligned}$$

そこで $C_{\alpha}^{\gamma} := \gamma! \sum_{\beta \leq \alpha, \beta \leq \gamma} \frac{a_{\alpha-\beta}^{\gamma}}{\beta!}$ とおけば

$$= \sum_{\gamma} \left(\sum_{\alpha} C_{\alpha}^{\gamma} D^{\alpha} f(x) \right) \frac{x^{\gamma}}{\gamma!}.$$

即ち, \mathbb{R} に対し, その特性《行列》 $C_P := (C_{\alpha}^{\gamma})_{(\alpha, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{Z}_+^n}$ とお

けば, $\mathcal{O}_0 \cong E$ の下 P は C_P と同一視される:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_0 & \xrightarrow{P} & \mathcal{O}_0 \\ \downarrow \eta & \searrow C_P & \downarrow \eta \\ E & \xrightarrow{C_P} & E \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ (\varphi_n) & \longmapsto & (\sum_{\alpha} C_{\alpha}^{\gamma} \varphi_n)_{\gamma} \end{array} \quad \text{また} \quad \begin{array}{ccc} B_{\text{pos}}(\mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\epsilon_P} & B_{\text{pos}}(\mathbb{C}^n) \\ \downarrow \eta & \searrow \epsilon_P & \downarrow \eta \\ E' & \xrightarrow{\epsilon_P} & E' \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ (\varphi_n) & \longmapsto & (\sum_{\alpha} C_{\alpha}^{\gamma} \varphi_n)_{\gamma} \end{array}.$$

さて, $P: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$ が全射である為の必要十分条件は次の2つ

が同時に成立つことである:

(i) $\epsilon_P: E' \rightarrow E'$ は単射.

(ii) 像 $C_P(E)$ は E で閉である.

(DFS)空間と(FS)空間の双対性においては閉値域の定理が成立つ

(小松 [9]) から, \bar{U} は更に次と同値である:

(ii)' 像 $C_P(E')$ は E' で閉である.

そこで, まず (i) が成立たぬばならないから $\langle\langle$ 行列 $\rangle\rangle C_P$ は, その形の

見易いものを探ることになる. C_P の形次第で (ii) 又は (ii)' を考える:

例 I. C_P が $\langle\langle$ 上三角行列 $\rangle\rangle$ になる:

$P = P(x, D_x) = \sum a_\alpha(x) D_x^\alpha$ は係数 $a_\alpha(x)$ が α $\langle\langle$ 階 $\rangle\rangle$ 以下の多項式である時, КОРОВАЙНИК 型 と云ふ. これは КОРОВАЙНИК [10] が

この型の作用素を最初に扱ったことによる: $a_\alpha(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} a_\alpha^\beta x^\beta$.

注意. 但し, [10] では $n=1$, $a_0 \equiv 1$, $a_\alpha = \sum_{\beta < \alpha} a_\alpha^\beta x^\beta$ を扱っており, かつ考える方程式 $Pu = f$ で u と f は整函数.

さて, この時には,

$$C_m^r = \begin{cases} r! \sum_{\alpha \leq r} \frac{a_{m-\alpha}^{r-\alpha}}{\alpha!} & (r \leq m) \\ 0 & (r \neq m) \end{cases}$$

と C_P は $\langle\langle$ 上三角行列 $\rangle\rangle$. 従って各対角成分 $C_m^m \neq 0$ とすれば,

$C_P: E' \rightarrow E'$ は単射である. 特に, P が定数係数 $\sum a_\alpha D_x^\alpha$ の時は,

$$C_P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ & & a_0 & a_1 & \dots \\ 0 & & & a_0 & \dots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

例 II. C_P が $\langle\langle$ 下三角行列 $\rangle\rangle$ になる:

$P = P(x, D_x) = \sum a_\alpha(x) D_x^\alpha$ は各係数 $a_\alpha(x) = x^\alpha \tilde{a}_\alpha(x)$ の形の

時, 確定特異型 であるといふ. この場合,

$$C_m^{\sigma} = \begin{cases} 0 & (r \neq m) \\ r! \sum_{\alpha \leq m} \frac{q_{m-\alpha}}{\alpha!} & (r \geq m) \end{cases}$$

と C_P は $\langle T = \text{角行列} \rangle$. 従って対角成分 $C_m^m \neq 0$ ($\forall m$) とすれば,

$\psi \in E$ に対し, $C_P(\varphi_m) = \psi$ は一意な形式角 $\varphi = (\varphi_m)$ を持つ.

特に, $P = \sum a_\alpha x^\alpha D_x^\alpha$ の形の時, P は Euler 型 であるといふ. この時,

$$C_P = \begin{bmatrix} a_0 & & & & 0 \\ & 1! (\frac{a_0}{1!} + a_1) & & & \\ & & 2! (\frac{a_0}{2!} + \frac{a_1}{1!} + a_2) & & \\ & & & 3! (\frac{a_0}{3!} + \frac{a_1}{2!} + \frac{a_2}{1!} + a_3) & \\ & 0 & & & \ddots \end{bmatrix}$$

例えば定数係数 $P = \sum a_\alpha D_x^\alpha$ の場合を振り返ってみよう (cf. 河合

[8], Martineau [12]). $\chi = (\chi_m) \in E'$, $\psi = (\psi_m) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ とし,

$\mathcal{C}_P \psi = \chi$ が形式的に成立つとすると, $\chi_m = \sum_{r \leq m} a_{m-r} \psi_r$ ($\forall m$)

となるが, これは, $\chi(z) := \sum_m \chi_m z^m$, $\psi(z) := \sum_m \psi_m z^m \in \mathbb{C}[[z]]$ と

おいて (但し, $\chi(z)$ は指数型の整函数), $\chi(z) = P(z)\psi(z)$ といふこと.

従って, $P \neq 0$ なら \mathcal{C}_P は単射である. さて, $P(z)$ は指数型といふ

う. 次の Harnack 型の補題は基本的である:

補題 3. (Hörmander [4]). $A, B, R > 0$ とし, $F(z), G(z)$,

$F(z)/G(z)$ を $B_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ 上の (一変数) 正則函数で,

$|G(0)| \neq 0$ か $|F(z)|$ と $|G(z)|$ は B_R 上で夫々 A, B で上かるおと

与えるとする: $\sup_{B_R} |F(z)| \leq A$, $\sup_{B_R} |G(z)| \leq B$.

この時, B_R 上で

$$\left| \frac{F(z)}{G(z)} \right| \leq A \cdot B^{\frac{2|z|}{R-|z|}} |G(0)|^{-\frac{R+|z|}{R-|z|}}.$$

そこで, E' の列 (ψ^k) と (χ^k) で E' で $\chi_k \rightarrow \chi$ ($k \rightarrow \infty$) なるものに對し, $\forall_p \psi^k = \chi^k$ であるとする. この補題から, $(\psi^k(z))$ は $O(\mathbb{C}^n)$ での正規列でない, ある部分列 $(\psi^{k_j}(z))$ があって ある $\psi(z) \in O(\mathbb{C}^n)$ 内で収束する. そこでもう一度この補題を使って $\psi(z) \in E'$ がいる. i.e. 対応する $\psi = (\psi_k) \in E'$ で結局 (ii)' がいる.

4. Коровейник 型作用素の全射性.

$P = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\alpha) D_{\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta \leq \alpha} a_{\alpha}^{\beta} x^{\beta} D_{\alpha}^{\alpha}$ を Коровейник 型 とすれば, 例として C_P は 上三角行列である. そこで次の定理を証明する:

定理 2. 次の条件 (7), (8) の下 $P: O_0 \rightarrow O_0$ は全射である:

(7) $A_0 > 0$ 及び $r_0 \in]0, 1[$ が存在して, 各 m に對し,

$$|C_m^m| \geq A_0 r_0^{m_1}$$

(8) $r \in]0, r_0[$ が存在し, 任意の $\varepsilon > 0$ に對し, $A > 0$ があって,

$$|C_m^{\lambda}| \leq A \frac{\lambda!}{\mu!} \varepsilon^{|\mu-\lambda|} r^{|\mu|} \quad (\text{for } \lambda \leq \mu).$$

また

定理 3. 次の条件 (9), (10) の下 $P: O_0 \rightarrow O_0$ は全射である:

(9) 任意の $A_0 > 0$ に對し, $m_0 > 0$ があって, $|\mu| \geq m$ なるば

$$|C_m^{\mu}| \geq A_0.$$

(10) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $A_\varepsilon > 0$ があって,

$$|C_\mu^\lambda| \leq A_\varepsilon \frac{\lambda!}{\mu!} \varepsilon^{|\mu-\lambda|} \quad (\text{for } \lambda \leq \mu).$$

(定理 2 の証明). (7) より 各 $C_\mu^\mu \neq 0$ であるから (i) は O.K. 次に,

$(\psi_n), (x_n) \in E'$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in E'$ か

(11) $C_\mu \psi_n = x_n$ (for every n)

とする. ここで簡単のため $\psi_n^{ee'} := \psi_n - \psi_{n'}', x_n^{ee'} := x_n - x_{n'}'$ とおくと, (11) は,

$$(12) \quad \begin{cases} \psi_0^{ee'} = \frac{x_0^{ee'}}{C_0^\mu} \\ \psi_n^{ee'} = \frac{1}{C_n^\mu} (x_n^{ee'} - \sum_{\lambda < n} C_n^\lambda \psi_\lambda^{ee'}) \quad (n > 0) \end{cases}$$

となる. 帰納法で 任意の $R > 0$ (≠ 0) に対し, $B^{ee'}(R) > 0$ で $n, n' \rightarrow \infty$

の時 0 に収束するものがあって, $\sup_n |\psi_n^{ee'}| R^{|\mu|} \mu! < B^{ee'}(R)$ となる

ものがあることを示そう: (12) と条件 (7), (8) より, $|\mu|$ 十分大とて

$$|\psi_n^{ee'}| R^{|\mu|} \mu!$$

$$\leq (|x_n^{ee'}| R^{|\mu|} \mu! + A \sum_{\lambda < n} \lambda! \varepsilon^{|\mu-\lambda|} R^{|\mu|} |\psi_\lambda^{ee'}|) A_0^{-1}$$

ここで $X^{ee'}(R) := A_0^{-1} \sup_n |x_n^{ee'}| R^{|\mu|} \mu!$ とおけば $X^{ee'}(R) \rightarrow 0$ ($n, n' \rightarrow \infty$).

$B^{ee'}(R) > 2 X^{ee'}(R)$ とおけば, 更に, $\varepsilon < \frac{1}{R}$ とおくと,

$$\begin{aligned} &\leq X^{ee'}(R) + \frac{A}{A_0} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{|\mu|} \sum_{\lambda < n} \left(\frac{\varepsilon R}{\varepsilon_0}\right)^{|\mu-\lambda|} |\psi_\lambda^{ee'}| R^{|\lambda|} \lambda! \\ &\leq X^{ee'}(R) + \frac{A}{A_0} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{|\mu|} \frac{\frac{\varepsilon R}{\varepsilon_0}}{\left(1 - \frac{\varepsilon R}{\varepsilon_0}\right)^n} B^{ee'}(R) \end{aligned}$$

$|\mu|$ 十分大とすれば

$$\leq X^{ee'}(R) + \frac{1}{2} B^{ee'}(R) < B^{ee'}(R).$$

かくして (ψ_n) は E' の Cauchy 列となり 結局 ある $\psi \in E'$ に収束する.

よって (ii) が証明された. (証明終).

(定理3の証明). 定理2の証明と同様にして, まず $\varepsilon < R^{-1}$ に対し,

$$A_0 > A\varepsilon \frac{2\varepsilon R}{(1-\varepsilon R)^n} \quad \text{とすると, 対応する } m \text{ に対し } |m| \geq m \text{ とすれば,}$$

$$\begin{aligned} |\psi_m^{R,R'}| R^{|m|} | &\leq X^{R,R'}(R) + \frac{A}{A_0} \sum_{\lambda \in m} \lambda! \varepsilon^{|m|-N} R^{|m|} |\varphi_\lambda^{R,R'}| \\ &= X^{R,R'}(R) + \frac{A}{A_0} \sum_{\lambda \in m} (\varepsilon R)^{|m|-N} |\varphi_\lambda^{R,R'}| R^{|m|} \lambda! \\ &\leq X^{R,R'}(R) + \frac{A}{A_0} \frac{\varepsilon R}{(1-\varepsilon R)^n} B^{R,R'}(R) \\ &\leq X^{R,R'}(R) + \frac{1}{2} B^{R,R'}(R) < B^{R,R'}(R) \end{aligned}$$

となり, 定理2と同様にして証明が終わる. (証明終).

5. 石塚定特異型作用素の全射性.

石塚定特異型の微分作用素 $P = \sum a_\alpha(x) D_\alpha^d = \sum x^\alpha \hat{a}_\alpha(x) D_\alpha^d$ に対しでは,

定理 4. 次の条件 (13), (14) の下 $P: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$ は全(単)射:

(13) $r \in \mathbb{J}_0, 1C$ 及び $C > 0$ があって, 任意の m に対し,

$$|C_m^m| \geq C |m|$$

(14) $\varepsilon_0 > 0$ が存在し, 任意の $\delta > 0$ に対し $N > 0$ があって

$$|C_m^r| \leq N \delta^{|m|} \varepsilon_0^{-|m|} \frac{r!}{m!} \quad (r > m).$$

(証明). ここでは, 任意の $f = \sum f_r x^r \in \mathcal{O}_0$ に対し, $g = \sum g_r x^r \in \mathcal{O}_0$ で $Pg = f$ なるものを見つけよう. 即ち $\sum_{\mu \leq r} C_\mu^r \frac{m!}{r!} g_\mu = f_r$ i.e.

$$(15) \quad \begin{cases} g_0 = \frac{f_0}{C_0^0} \\ g_r = \frac{1}{C_r^r} \left(f_r - \sum_{\mu < r} C_\mu^r \frac{m!}{r!} g_\mu \right) \quad (r > 0) \end{cases}$$

がなければならぬ. ここに ある $R > 0$ があって $|g_r| \leq R^{|r|}$ (for every r) と仮定して帰納法を示そう: $M_\varepsilon := \sup_{\alpha \in \mathbb{J}_0} |f_\alpha|$ とおくと,

$$|\delta_r| \leq M_\varepsilon \varepsilon^{-1/r}. \quad \varepsilon = \varepsilon^* \text{ (15) より.}$$

$$\begin{aligned} |g_r| &\leq r^{-1/r} [M_\varepsilon \varepsilon^{-1/r} + N \sum_{m \leq r} \delta_m^m \varepsilon^{-1/r} R^m] \\ &= [M_\varepsilon (r\varepsilon R)^{-1/r} + N \sum_{m \leq r} (r\varepsilon R)^{-1/r-1} \left(\frac{\sigma}{r\varepsilon}\right)^m] R^{1/r} \end{aligned}$$

$$\sigma < r\varepsilon_0 \text{ (}<1\text{)} \quad \text{かつ} \quad R > \max[\sigma^{-1}, 2\varepsilon^{-1} M_\varepsilon, (r\varepsilon_0)^{-1}] \quad \text{とすれば,}$$

$$\frac{\sigma}{r\varepsilon_0} < 1, \quad r\varepsilon_0 R < 1 \quad \text{だから結局.}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left[\frac{1}{2} + N \sum_{m \leq r} (r\varepsilon_0 R)^{-1/r-1} \right] R^{1/r} \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + N (r\varepsilon R)^{-1} \left(\frac{1}{1 - (r\varepsilon R)^{-1}} \right)^r \right) R^{1/r} \end{aligned}$$

が十分大きい r に対して成立つ. R が十分大 > 0 なる結局

$$\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) R^{1/r} = R^{1/r} \quad \text{となる. (証明終)}$$

6. Euler 型の方程式

Euler 型の微分作用素 $P = \sum a_d x^d D_x^d$ を考えよう. 先ず,

命題 1. $P: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$ が全射である場合には, 次の条件が成立つ

ことが必要十分である:

$$(16) \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[\quad \exists C > 0 \text{ が存在して,}$$

$$|C_m^m| \geq C r^m \quad (\text{for every } m).$$

(証明). $g = \sum g_m x^m, f = \sum f_m x^m \in \mathcal{O}_0$ に対し, $Pg = f$ とは

$$(17) \quad C_m^m g_m = f_m \quad (\text{for every } m)$$

といふことであるから 何れにしても $C_m^m \neq 0$ である. 先ず (16) を仮定すれば

任意の $P \gg 0$ と $f \in \mathcal{O}(\Delta_P)$ に対し, $g_m := f_m / C_m^m$ とおけば $g =$

$\sum g_m x^m \in \mathcal{O}(\Delta_{P_f})$ となりかつ $Pg = f$ である. 逆に, $P: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$ が

全射なる。例へば $\delta = \sum x^\mu \in \mathcal{O}(\Delta_0)$ に対し, $\exists \delta = \sum g_\mu x^\mu \in \mathcal{O}_0$ s.t.
 $P\delta = \delta$ であるから, (17) より $g_\mu = C_\mu^{-1}$. $\varepsilon = \varepsilon$ $g \in \mathcal{O}(\Delta_{\vec{r}})$ (但し,
 $\vec{r} := (r_1, r_2, \dots, r_n)$ ($r_i > 0$)) とすれば 任意の $r \in]0, r[$ に対し, $C_r > 0$
 がある. $|C_\mu^{-1}| = |g_\mu| \leq C_r^{-1} r^{-|\mu|}$. 従って $|C_\mu| \geq C_r r^{|\mu|}$. (証明)

注意. この時, $P: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$ は全単射である.

系. $q_0 \neq 0$ かつ 各 $q_\alpha \geq 0$ とする時, Euler の微分作用素 $P = \sum q_\alpha x^\alpha D_x^\alpha$ は (16) を満たす. 従って $P: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$ は全単射である.

(証明) 実際 $C_\mu = \mu! \sum_{\alpha \leq \mu} \frac{q_\alpha}{(\mu - \alpha)!} \geq q_0 > 0$ である.

以下では $P = \sum q_\alpha x^\alpha D_x^\alpha: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ は Euler 型の連続局所同型とする. 上の二つより $x=0$ においては $P: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$ の全射性はわかった. また $x^0 \in \mathbb{C}_x^n$ (但し $\mathbb{C}_x := \mathbb{C} \setminus \{0\}$) なる点においては変数変換

$$(18) \quad x_1 = e^{t_1}, x_2 = e^{t_2}, \dots, x_n = e^{t_n}$$

を行えば

$$(19) \quad x^\alpha D_x^\alpha = \prod_{i=1}^n D_{t_i} (D_{t_i} - 1) \cdots (D_{t_i} - (\alpha_i - 1))$$

であるから定数係数の場合の結果 (Martineau [12] cf. Kawai [8]) より,

$P: \mathcal{O}_{x_0} \rightarrow \mathcal{O}_{x_0}$ は全射である. また, 更に次の定理がわかる:

定理 5. $P = \sum q_\alpha x^\alpha D_x^\alpha$ を Euler 型の局所作用素とすれば,

$P: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ は全射な線型写像である.

(証明) 実際 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = \pm 1$ とし,

$$U_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \operatorname{Im} z_j > 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)\}$$

とすると, $P: \mathcal{O}(U_\varepsilon) \rightarrow \mathcal{O}(U_\varepsilon)$ は全射である. これは実際, U_ε において

$t_j = \log x_j \quad (1 \leq j \leq n)$ と変数変換して, P は定数係数の微分作用素

に変換されるが, この時 U_ε は開凸領域

$$\prod_{j=1}^n \{t_j \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2}(\varepsilon_j - 1) < \operatorname{Im} t_j < \frac{\pi}{2}(\varepsilon_j + 1)\}$$

に写ることからわかる. ここで任意の $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対し, u は $f_\varepsilon \in \mathcal{O}(U_\varepsilon)$

で $u = \sum_{\varepsilon} b_{U_\varepsilon}(f_\varepsilon)$ と書かれるが, $g_\varepsilon \in \mathcal{O}(U_\varepsilon)$ があって $Pg_\varepsilon = f_\varepsilon$

となるのだから, $v := \sum_{\varepsilon} b_{U_\varepsilon}(g_\varepsilon)$ とおけば $Pv = u$ となる. (証明)

従って特に, $P: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ は全射な層準同型を与える.

さて, 次に $x^0 \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{C}_+^n \setminus \{0\}$ における状態を記述しよう. 即ち,

例えば, $x_1^0, \dots, x_m^0 = 0, x_{m+1}^0, \dots, x_n^0 \neq 0$ なる点で考え

たい. ここで簡単のため記号を変えて,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

とし (x, y) 変数の Euler 型の局所微分作用素

$$P = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta D_x^\alpha D_y^\beta : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m}$$

を考えると. 以下, 条件 (16) を仮定し, 点 $(x, y) = (0, \eta)$, $\eta_1, \dots,$

$\eta_m \neq 0$ で考える. 変数変換

$$(18)' \quad (x, y) \mapsto (x, t) : y_1 = \eta_1 e^{t_1}, y_2 = \eta_2 e^{t_2}, \dots, y_m = \eta_m e^{t_m}$$

により, $P = \sum_{\alpha, \beta} \tilde{a}_{\alpha, \beta} x^\alpha D_x^\alpha D_t^\beta : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+m}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+m}}$ と $(x, t) = (0, 0)$

で考えることにする: 任意の $u(x, t) \in \mathcal{B}_{\{0\}} \mathbb{C}^{n+m}$ に対し,

$$\mathcal{F}_1(tPu)(z, \tau) = P(P_1, z, \tau) (\mathcal{F}_1 u)(z, \tau)$$

$$:= \sum_{\alpha, \beta} \tilde{a}_{\alpha\beta} z^\alpha \tau^\beta p_j^\alpha (g(u))(z, \tau)$$

と仮定. $z = z''$ $\tilde{b}_{\mu\beta} := \sum_{\alpha \leq \mu} \frac{\tilde{a}_{\alpha\beta}}{(m-\alpha)!}$ ($\forall \mu, \beta$) (c.f. (4)') とおけば,

$$(g(u))(z, \tau) = \sum_{m, \lambda} u_{m\lambda} z^m \tau^\lambda \in E' \text{ (正し)},$$

$$\begin{aligned} g(\text{cp } u)(z, \tau) &= \sum_{m, \lambda, \beta} \mu! \tilde{b}_{\mu\beta} u_{m\lambda} z^m \tau^{\lambda+\beta} \\ &= \sum_{\mu} \left(\sum_{\beta} \mu! \tilde{b}_{\mu\beta} \tau^\beta \right) \left(\sum_{\lambda} u_{m\lambda} \tau^\lambda \right) z^\mu \end{aligned}$$

そこでこれを $= v := \sum_{m, \nu} v_{m\nu} z^m \tau^\nu$ ($\in E'$) とおくと, これは,

$$(20) \quad \left(\sum_{\beta} \mu! \tilde{b}_{\mu\beta} \tau^\beta \right) \left(\sum_{\lambda} u_{m\lambda} \tau^\lambda \right) = \sum_{\nu} v_{m\nu} \tau^\nu \quad (\text{for } u_m)$$

を意味する. かく, $\tilde{a}_{\alpha 0} = a_{\alpha 0}$ ($\forall \alpha$) となることに注意すれば,

$$\tilde{b}_{m0} = \sum_{\alpha \leq m} \frac{\tilde{a}_{\alpha 0}}{(m-\alpha)!} = \sum_{\alpha \leq m} \frac{a_{\alpha 0}}{(m-\alpha)!}$$

であるから, 条件 (16) より, $|\tilde{b}_{m0}| \geq C |m| / m!$ となるので, また

(20) より $\text{cp} : B_{\text{osz}|\mathbb{C}^{2m}} \rightarrow B_{\text{osz}|\mathbb{C}^{2m}}$ は単射になる. 次に, 列

$v^R = \text{cp } u^R$ ($u^R, v^R \in E'$) が $B_{\text{osz}|\mathbb{C}^{2m}}$ 内で v に収束するとすれば, (20) より補題 3 を用いて, 各 m に對し,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\lambda} (u_{m\lambda}^R - u_{m\lambda}^{R'}) \tau^\lambda \right| \\ & \leq \sum_{\nu} |v_{m\nu}^R - v_{m\nu}^{R'}| R^{|\nu|} \left[\sum_{\beta} |\tilde{b}_{\mu\beta}^{\sim}| \mu! R^{|\beta|} \right]^{\frac{2|\tau|}{R-|\tau|}} |\tilde{b}_{m0}^{\sim} \mu!|^{-\frac{R+|\tau|}{R-|\tau|}}. \end{aligned}$$

従って, $C_1 > 1$ とし,

$$\begin{aligned} |u^R(z, \tau) - u^{R'}(z, \tau)| &= \left| \sum_{m, \lambda} (u_{m\lambda}^R - u_{m\lambda}^{R'}) \tau^\lambda z^m \right| \\ &\leq \sum_{m, \nu} |v_{m\nu}^R - v_{m\nu}^{R'}| R^{|\nu|} |C_1 z|^{|\nu|} \sup_m \left[\left(\sum_{\beta} |\tilde{b}_{\mu\beta}^{\sim}| \mu! R^{|\beta|} \right)^{\frac{2|\tau|}{R-|\tau|}} |\tilde{b}_{m0}^{\sim} \mu!|^{-\frac{R+|\tau|}{R-|\tau|}} \right]. \end{aligned}$$

$\sum_{m, \nu} |v_{m\nu}^R - v_{m\nu}^{R'}| R^{|\nu|} |C_1 z|^{|\nu|}$ は $|z| < R/2$ 内で一様 (=0) に収束するが,

$\sup_m [\]$ は $C_1 > 1$ を $r < R$ に依存して十分大きく取れば有界.

従って $|u^R(z, \tau) - u^{R'}(z, \tau)|$ は $|z|, |\tau| < R/2$ (=對して一様に

0に収束、 $R > 0$ は任意だから結局 $u^R(z, \tau)$ は $O(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m)$ 内で
ある $u(z, \tau)$ に収束する。句論形式的には $\varphi u = v$ である。以上の
ことを $u^R - u^S$ の代わりに u に代わって行くと $u \in E'$ がわかる。従って、
 $v = \varphi u \in I_m \varphi$ となり、 $I_m \varphi$ は閉である。よって、

定理 6. 条件 (16) の下、Euler 型の局所微分作用素 $P =$
 $\sum a_{\alpha} z^{\alpha} D_z^{\alpha} : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ は全射である。

文 献

- [1] Aoki T., 無限階擬微分作用素の表象理論, 数理解析講究録 468.
- [2] Aoki T., Calcul exponentiel des opérateurs micro-différentiels II, (à paraître).
- [3] Aoki T., Kashiwara M. & Kawai T., On a class of linear differential operators of infinite order with finite index (to appear).
- [4] Hörmander L., On the range of convolution operators, Am. Math. 76 (1962), 148-170.
- [5] Ishimura R., Homomorphisme du faisceau des germes de fonction holomorphe dans lui-même et opérateurs différentiels, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 32 (1978), 301-312.
- [6] Ishimura R., Existence locale de solutions holomorphes pour les équations différentielles d'ordre infini, à paraître dans Ann. Inst. Fourier Grenoble 35 (1985).

- [7] Kashiwara M. & Kawai T., On holonomic systems of microdifferential equations III, Publ RIMS Kyoto Univ. 17(1981), 831-979.
- [8] Kawai T., On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser. IA 17(1970), 467-517.
- [9] Komatsu H. 佐藤の超函数と定数係数線形偏微分方程式, 東大数研研報 22, 1968.
- [10] Коробейник Ю.Ф. Исследование дифференциальных уравнений бесконечного порядка с полиномиальными коэффициентами с помощью операторных уравнений интегрального типа, Мат. сб 49(1959), 191-206.
- [11] Левин В.Я. Распределение корней целых функций, Госуд. Изд. Москва, 1956.
- [12] Martineau A. Equations différentielles d'ordre infini, Bull. Soc. Math. France 95 (1967), 109-154.
- [13] Рокчин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных, Наука Москва, 1971.
- [14] Sato M. Kawai T. & Kashiwara M., Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math., No. 287, Springer (1973), 265-529.